**Bài 3. Sai số tích lũy và các bài toán sai số**

* + 1. **Sai số hàm một biến**

Cho hàm số *y = f(x)* và *x* là số gần đúng của *x0*; Ký hiệu *Δx* và *Δy* là sai số tuyệt đối tương ứng của đối số và hàm số. Ta sẽ xét các bài toán ước lượng sai số của hàm hoặc của đối số khi biết một trong hai sai số.

* + - 1. ***Bài toán thuận***

Bài toán này ta ước lượng *Δy* khi biết *x* và *Δx*.

Theo công thức số gia hữu hạn ta có



ở đây *y0* là giá trị đúng của *y* và *c* là điểm thuộc miền *(x, x0)* nếu *x < x0* và thuộc *(x0, x)* nếu *x0 < x*.

Khi *Δx* bé, *x* gần *x0* ta có ước lượng



*Ví dụ*. Cho *y =* ln*x* ta có ước lượng



* + - 1. ***Bài toán ngược***

Trong bài toán này, ta biết giá trị gần đúng *x*, ta cần xác định phải tính *x* với Δx là bao nhiêu để đảm bảo *Δy ≤ Δ*. Với giá trị *Δ* cho trước, từ công thức (1.11) ta thấy nếu

 (1.13)

thì đủ để *Δy ≤ Δ.*

*Ví dụ* *y = ex* với *x* ≈ 3 để có *Δy* ≤ 0,01 ta tính *x* với là đủ.

* + 1. **Sai số qua các phép toán số học**

Khi tính toán với các số gần đúng thì sai số sẽ tích luỹ qua các phép toán cơ bản. Sau đây ta ước lượng sai số khi cộng trừ, nhân chia các số gần đúng.

* + - 1. ***Sai số của tổng hoặc hiệu***

***Mệnh đề***. Sai số tuyệt đối của một tổng hoặc hiệu bằng tổng các sai số tuyệt đối thành phần.

***Chứng minh***. Để đơn giản ta xét *u = a ± b* với các số *a*, *b* có giá trị đúng *a0*, *b0* và sai số tuyệt đối *Δa*, *Δb* tương ứng.

Khi đó ta có



Do đó ta có



Nên  đpcm.

Trường hợp có nhiều số hạng được xét tương tự.

*Ví dụ*. Cho *a* = 50,5; *b* = 50,9 với *Δa = Δb =* 0,05 và *u = a - b*

Ta có *u* = 0,4 với *Δu* = 0,05 + 0,05 = 0,1

Vậy .

Từ đó ta thấy khi trừ hai số gần bằng nhau thì hiệu số sẽ có sai số tương đối lớn.

* + - 1. ***Sai số của tích hoặc thương***

***Mệnh đề***. Sai số tương đối của tích hoặc thương bằng tổng các sai số ***tương đối*** thành phần.

***Chứng minh***. Xét



Ta có thể giả thiết các xi và yj đều dương. Khi đó ta có



Do mệnh đề (3.2.1) ta có



Nhờ ví dụ (3.1.1) ta suy ra

 đpcm

*Ví dụ*. Xét *S = d.r* như ở ví dụ 1.11 *d* = 5,45; *r* = 3,94; *Δd = Δr =* 0,01

Ta có *δd* = 0,001835

*δr* = 0,002538

*δS* = 0,004373 nên *ΔS* = 0,094

ta có được ước lượng đã tính.

1. **Sai số hàm nhiều biến**

Ta xét hàm nhiều biến  với giá trị gần đúng  và *y* đã biết ta xét các bài toán ước lượng sai số hàm số và đối số.

***Bài toán thuận***

Trong bài toán này, ta cần ước lượng sai số *Δy* khi biết *Δxi; ∀i ≤ n*.

Tương tự hàm một biến, sử dụng công thức số gia hữu hạn ta có ước lượng



với  là đạo hàm riêng của *u* theo biến *xi*.

*Ví dụ*. Xét *u = a2b* với *a* = 2,0; *b* = 25,0; *Δa = Δb =* 0,1

Ta có *u* = 100

Với *Δu* = 2*abΔa* + *a2Δb* = 100.0,1 + 4.0,1 = 10,4.

* + - 1. ***Bài toán ngược***

Bây giờ ta đã biết các số gần đúng *xi*, ta phải tính chúng với sai số tuyệt đối như thế nào để có *Δy ≤ Δ*; ở đây *Δ* là số cho trước.

Các phương pháp xử lý bài toán này đều dựa trên công thức (1.14) một cách linh hoạt. Sau đây ta xét hai phương pháp thông dụng.

1. Sai số của đối số như nhau: *Δxk = Δx ∀k ≤ n*.

Từ (1.13) ta có



Vậy để cho *Δu ≤ Δ* thì chỉ cần

 là đủ (1.15)

1. Phân bố đều sai số.

Bây giờ ta xét khi 

Khi đó *∀j ≤ n*, từ (1.14) ta có



Vậy để cho *Δu ≤ Δ* thì chỉ cần tính

 là đủ (1.16)

*Ví dụ*. Mảnh vườn có cạnh *d* ≈ 45,0 m và *r* ≈ 20,0 m. Cần tính *d* và *r* với *Δd, Δr* như thế nào để *ΔS* ≤ 0,1 *m2*.

Cách 1. Xét *Δd = Δr = Δx* ta áp dụng (1.15)

Cần tính  m là đủ.

Cách 2. Khi đo chiều dài thường có sai số lớn hơn chiều rộng nên ta có thể dùng (1.16).

 *m*

 *m*

là đủ để *ΔS ≤* 0,1 *m2*.

**3. Sai số qui tròn, quan hệ giữa sai số và số chữ số đáng tin (chữ số chắc).**

1. **BIỂU DIỄN SỐ GẦN ĐÚNG**

Trong mục này ta xét các số được biểu diễn dưới dạng thâp phân. Khi các số là gần đúng vấn đề đặt ra là nên biểu diễn chúng với bao nhiêu chữ số? Thu gọn chúng như thế nào ?

**Chữ số có nghĩa**

**Trong biểu diễn theo cơ số b ( trường hợp riêng là biểu diễn thập phân), các chữ số kể từ chữ số khác 0 đầu tiên tính từ trái sang phải gọi là các chữ số có nghĩa, các chữ số 0 bên trái là không có nghĩa.**

Nếu a được viết dưới dạng



thì các chữ số 0 bên trái không có ở biểu diễn này, ý nghĩa của các chữ số 0 bên phải liên quan tới cách biểu diễn số gần đúng sẽ xét dưới đây.

*Ví dụ*. Số a = 03,4050 thì chữ số 0 đầu không có nghĩa (người ta có thể điền để tránh viết thêm) còn các chữ số 3; 4; 0; 5; 0 là có nghĩa.

Số *b* = 0,034 thì các chữ số 3; 4 là có nghĩa, hai chữ số 0 bên trái không có nghĩa vì nếu biểu diễn theo dạng (1.7) thì các chữ số này không cần đến.

* + 1. **Chữ số chắc**

*Định nghĩa*. Nếu *a* có biểu diễn (1.7) với sai số  thì *ak* là chữ số chắc (đáng tin)  (theo nghĩa hẹp dùng trong tính toán), còn khi 0.5\*10m<  thì am là chắc theo nghĩa rộng, cũng *ak* với  gọi là chắc theo nghĩa chặt.

*Ví dụ*. *a* = 21,473 và  thì

Các chữ số 2; 1 là chắc theo nghĩa hẹp và chữ số 4 là chắc theo nghĩa rộng. Còn các chữ số 7; 3 là không đáng tin hay không chắc.

Khi cho số gần đúng ta có thể cho theo hai cách

* Cách 1: Viết kèm với sai số tuyệt đối
* Cách 2: Chỉ viết các chữ số chắc. Nếu ta có số gần đúng mà không cho sai số thì luôn ngầm hiểu các chữ số có nghĩa là các chữ số chắc. Như vậy các chữ số 0 ở bên phải cho ta biết nó là chữ số chắc.

Trong quá trình tính toán, người ta thường để lại vài chữ số không chắc và trong kết quả thì giữ lại các chữ số chắc theo nghĩa rộng.

* + 1. **Số thu gọn**

Khi số *a* có nhiều chữ số không chắc hoặc có quá nhiều chữ số có nghĩa thì người ta thường thu gọn thành số  có ít chữ số có nghĩa hơn. Nếu *a* có biểu diễn (1.7) và số thu gọn được giữ lại đến *am (m>p)* thì  có biểu diễn



nhờ bỏ đi các chữ số *ak (k < m)* theo quy tắc sau:

***Quy tắc chữ số chẵn***

Giả sử *a > 0* và phần bỏ đi là  . Nếu  < 0,5.10*m* thì , nghĩa ta giữ nguyên các chữ số đến hàng m tính từ trái sang phải.

Nếu  > 0,5.10*m* thì 

Nếu  = 0,5.10*m* thì theo (1.9) nếu *am* chẵn

còn theo (1.10) nếu *am* lẻ.

Khi *a < 0* ta thu gọn giá trị tuyệt đối và giữ nguyên dấu.

Khi thu gọn *a* thành  ta có sai số thu gọn . Để nó ít ảnh hưởng tới sai số tuyệt đối ta thu gọn số và giữ lại một hoặc hai số không chắc.

Nếu *a* có biểu diễn (1.7) và *ak* chắc với *k ≥ m* thì  nên



Như vậy sai số tương đối của số gần đúng có thể ước lượng bởi nghịch đảo của số gồm các chữ số chắc của a không có dấu phẩy.

**Dấu phảy động**

Chúng ta biết rằng trong biểu diễn thập phân, mọi số thực được biểu diễn bởi một hữu hạn hoặc một dãy vô hạn các chữ số thập phân.

Bây giờ hầu hết các máy tính có hai cách biểu diễn số, được gọi là dấu phảy tĩnh và dấu phảy động.

Trong một biểu diễn dấu phảy tĩnh tất cả các số được được đưa ra với một số cố định các số thập phân sau dấu thập phân; ví dụ, số được đưa ra với 3 số thập phân là 62.358, 0.014, 1.000. Trong một văn bản chúng ta sẽ viết, nói, biểu diễn 3 số thập phân là biểu diễn 3D.

Biểu diễn dấu phảy tĩnh có ưu thế:

* + - * Thuận tiện trong tính toán hàng ngày,
      * và trong tính toán với các số gần đơn vị

Biểu diễn dấu phảy cố định là không phù hợp trong hầu hết các tính toán khoa học vì số các giá trị có thể biểu diễn bị hạn chế và do vậy, sẽ chúng ta sẽ không quan tâm.

Trong hệ thống dấu phảy động, chúng sẽ ta viết, ví dụ,

0,6247.103 ; 0,1735.10-13; -0,2000.10-1

hay đôi khi ta biểu diễn:

6,247.102; 1.735.10-14; -2,000.10-2

Chúng ta thấy rằng trong biểu diễn này số các chữ số có nghĩa được giữ cố định, trong khi dấu phảy là "động." Ở đây, một chữ số có nghĩa của một số c là chữ số bất kỳ của c, ngoại trừ chữ số 0 nằm ở bên trái chữ số khác 0 đầu tiên; các chữ số 0 này chỉ để xác định vị trí của dấu phảy (như vậy, bất kỳ chữ 0 khác đều là chữ số có nghĩa của c). Ví dụ:

13600, 1.3600, 0.0013600

tất cả đều có 5 chữ số có nghĩa.

Trong văn bản chúng ta nói rút gọn 1 số đến 5 chữ số có nghĩa là 5S.

Việc sử dụng số mũ cho phép chúng ta biểu diễn số rất lớn và rất nhỏ. Thật vậy, về mặt lý thuyết số khác 0 bất kỳ a có thể được viết như sau:

1. 

**Roundoff Rule.** To round a number *x* to *k* decimals, and to *x* and chop the  
digits after the digit. (*k*  1)

Quy tắc làm tròn

Để làm tròn số x đến k chữ số sau dấu phảy, ta cộng vào x lượng 0,5.10-(k+1) và bỏ đi từ chữ số thứ (k+1) sau dấu phảy trở đi.

Ví dụ









